СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

5 Стационарное уравнение Шредингера

1. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5 \cdot 10^{-29}$ кг имеет вид

    - $\Psi(x, y, z) = A \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{-\gamma z}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;

- $\Psi(x,y,z) = Ae^{-\alpha x}\sin(\beta y)\sin(\gamma z)$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = Ae^{-\alpha x - i\beta y - \gamma z}$, $\beta = 8\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,z) = Ae^{-i\alpha x}\sin(\gamma z)$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(y,z) = A\left(\cos(\alpha y) + e^{i\alpha z}\right)$.

Кинетическая энергия частицы равна $E_k = 5$ эВ. Найти константу α. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с.

2. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5\cdot 10^{-29}$ кг имеет вид

- $\Psi(x,y) = Ae^{-\alpha x}e^{i\beta y}$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x) = A\left(\cos(\alpha x) + e^{i\alpha x}\right)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$.

Найти кинетическую энергию частицы в эВ. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с.

3. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5\cdot 10^{-29}$ кг имеет вид

- $\Psi(x,y,z) = Ae^{-\alpha x}\sin(\beta y)\cos(\gamma z)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = Ae^{-\alpha x - \beta y}\cos(\gamma z)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = A\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = Ae^{i\alpha x}\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;

Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной нулю.

4. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5\cdot 10^{-29}$ кг имеет вид

- $\Psi_1(x,y,z) = Ae^{-\alpha x - \beta y - \gamma z}$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi_2(x,y,z) = Ae^{-i\alpha x}e^{-\beta y}\cos(\gamma z)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;

Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной $U_1 = 8$ эВ и $U_2 = 6$ эВ. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с.

5. Волновая функция микрочастицы с кинетической энергией в 5 эВ имеет вид

- $\Psi(x,y,z) = Ae^{-\alpha x}\sin(\beta y)\cos(\gamma z)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = Ae^{-\alpha x}e^{-\beta y}e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = A\sin(\alpha x)e^{-\beta y}e^{-\gamma z}$, $\alpha = 5\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = A\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = Ae^{i\alpha x}\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,y,z) = Ae^{-i\alpha x + i\beta y}\cos(\gamma z)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\beta = 6\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(x,z) = Ae^{-i\alpha x}\cos(\gamma z)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$, $\gamma = 2\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$;
- $\Psi(y,z) = A\left(\cos\alpha z + e^{i\alpha y}\right)$, $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$.

Найти массу частицы. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с.

6. Частица массы m совершает свободное одномерное движение. Найти энергии и волновые функции стационарных состояний. Решить задачу также и для свободного трехмерного движения.
7. Найти энергии стационарных состояний плоского ротатора с моментом инерции I.
8. Система с не зависящим от времени гамильтонианом в начальный момент времени находилась в состоянии с волновой функцией $\Psi(\xi, 0)$. Найти волновую функцию этой системы в последующие моменты времени $\Psi(\xi, t)$. Энергетический спектр и базис системы предполагаются известными.
9. Свободная частица имеет в момент времени $t = 0$ волновую функцию:

- $\Psi(x,0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\hbar}} \sin\left(\dfrac{xp_0}{\hbar}\right)$;
- $\Psi(x,0) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\, e^{\left(i\dfrac{xp_0}{\hbar}\right)}$.

Найти волновые функции в следующие моменты времени.

10. Как изменяется во времени состояние плоского ротатора, если в начальный момент времени он описывался волновой функцией $\Psi(x,0) = A\sin^2\varphi$?

11. Волновая функция частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с абсолютно непроницаемыми стенками, имела в начальный момент времени вид $\Psi(x,0) = Ax(x-a)$. Найти волновую функцию в произвольный момент времени.

12. Состояние свободной частицы массы m в начальный момент времени задается волновым пакетом $\Psi(x) = Aexp\left(-\dfrac{x^2}{2x_0^2} + ik_0x\right)$, где $x_0 > 0$ — константа с размерностью длины, определяющая ширину пакета, k_0 — константа с размерностью волнового числа. Показать, что с течением времени пакет «расплывается». Найти закон «расплывания», плотность вероятности и плотность тока вероятности.

13. Плоский ротатор с моментом инерции J в момент времени $t = 0$ приведен в состояние с волновой функцией $\Psi(\varphi) = A(1 + \cos\varphi + \cos(2\varphi))$. Найти волновую функцию в последующие моменты $t > 0$.

14. Могут ли состояния с нижеприведенными волновыми функциями быть стационарными:

    (a) $\Psi(\xi,t) = \Phi(\xi)e^{-i(\varepsilon - i\gamma)t}$;
    (b) $\Psi(\xi,t) = \Phi(\xi)e^{-i\varepsilon t} - \Phi^*(\xi)e^{i\varepsilon t}$;
    (c) $\Psi(\varphi,t) = \frac{A}{2}\left(1 - \cos 2\varphi e^{2i\hbar t/\alpha}\right)$;
    (d) $\Psi(\xi,t) = \Phi_1(\xi)e^{-i\varepsilon t} - \Phi_2(\xi)e^{-2i\varepsilon t}$;
    (e) $\Psi(\xi,t) = \Phi(\xi,t)e^{-iEt/\hbar}$;
    (f) $\Psi(\xi,t) = \Phi(\xi,t)e^{b - i\varepsilon t}$.

    Все константы предполагать вещественными.

6 Дифференцирование операторов и интегралы движения

1. Найти следующие производные $\dfrac{d}{dt}(\hat{M}_x)$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{M}_y)$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{M}_z)$; $\dfrac{d}{dt}(f(\vec{r},t)\hat{M}_x)$; $\dfrac{d}{dt}(f(\vec{r},t)\hat{M}_y)$; $\dfrac{d}{dt}(f(\vec{r},t)\hat{M}_z)$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{p}_y\hat{x})$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{p}_z\hat{x})$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{p}_z\hat{y})$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{p}_x\hat{y})$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{p}_y\hat{z})$; $\dfrac{d}{dt}(\hat{p}_x\hat{z})$.

2. Частица с массой m движется во внешнем силовом поле с потенциальной энергией $U(\vec{r})$. Получить явный вид операторов скорости и ускорения частицы.

3. Показать, что в отсутствие силовых полей импульс сохраняется.

4. Показать, что в аксиально-симметричных силовых полях проекция орбитального момента на ось симметрии является интегралом движения.

5. Показать, что в сферически-симметричных (центральных) силовых полях квадрат орбитального момента является интегралом движения.

6. Показать, что если потенциальная энергия является четной функцией координат, то четность будет интегралом движения.

7. Показать, что для частицы, движущейся в постоянном однородном поле действия силы $\vec{f}$, величина $\vec{F} = \vec{p} - \vec{f}t$ будет интегралом движения.

8. Определить полный набор физических величин в поле $U = U(x)$, $U = U(y)$, $U = U(z)$, $U = U(x,y)$, $U = U(x,z)$, $U = U(y,z)$, $U = U(r)$.

9. Найти полные наборы физических величин в следующих полях:

(a) при свободном движении;
(b) поле однородного бесконечного цилиндра с осью Oz;
(c) поле однородной плоскости (xOy);
(d) поле бесконечной однородной полуплоскости (xOy), $z > 0$;
(e) поле однородного шара;
(f) поле двух точечных зарядов на оси Z;
(g) переменное поле однородного бесконечного цилиндра;
(h) переменное поле однородной бесконечной нити;
(i) переменное поле неподвижной точечной частицы;
(j) в однородном переменном поле;
(k) в поле равномерно заряженного бесконечного прямого провода с переменным зарядом;
(l) в поле однородного трехосного эллипсоида;
(m) в поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии с шагом a.

10. Электрон с массой m_e и зарядом $-e$ $(e > 0)$ движется в поле неподвижного притягивающего кулоновского центра с зарядом $Ze > 0$. В классическом случае одним из интегралов движения был бы вектор Рунге–Ленца $\vec{A} = \dfrac{\vec{r}}{r} - \dfrac{[\vec{v} \times \vec{M}]}{Ze^2}$. Построить оператор, соответствующий вектору Рунге–Ленца. Показать, что эта величина сохраняется и в микромире.

7 Потенциальные ямы

1. Потенциальная энергия имеет δ–образную особенность в точке a: $V(x) = U(x) + \Omega\delta(x - a)$, где $U(x)$ — кусочно–непрерывная функция с возможным разрывом конечной величины в точке $x - a$, $\Omega = const$. Получить условия сшивки для волновой функции в этом случае.
2. Найти энергетические уровни и нормированные волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальной яме:

   - $U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, x > a \end{cases};$
   - $U(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ \infty, & x \notin \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \end{cases};$

   Определить средние значения координаты и импульса, а также их флуктуации. Проверить соотношение неопределенностей для координаты и импульса в стационарных состояниях.
3. Найти распределение вероятностей различных значений энергии частицы массы m, флуктуации ее координаты, импульса и энергии, в бесконечно глубокой потенциальной яме, ширины a, описываемой волновой функцией вида:

   - $\Psi(x) = Ax(x - a);$
   - $\Psi(x) = Ax\left(x^2 - \dfrac{a^2}{4}\right);$
   - $\Psi(x) = B\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right).$

4. Частица массы m движется в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a. Найти:

   - наиболее вероятные положения частицы, приведенной в первое возбужденное состояние;
   - среднее значение кинетической энергии частицы в произвольном стационарном состоянии.

5. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна a. Найти массу частицы m, если разность энергий третьего и второго энергетических уровней равна $\triangle E$.
6. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти квантовое число n энергетического уровня частицы, если интервалы энергии до соседних с ним уровней (верхнего и нижнего) относятся как 7/5.
7. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна a. Найти вероятность пребывания частицы в области $a/3 < x < 2a/3$.
8. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками. Найти вероятность пребывания частицы, в области $0 < x < 2a/3$.
9. Протон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a=1 нм с бесконечно высокими стенками. Найти наименьшую разность энергетических уровней $\triangle E$ протона.
10. Решить уравнение Шредингера для частицы массы m, находящейся в двумерной бесконечно глубокой потенциальной яме, ширина которой по оси x равна a, а по оси y равна b $(0 < x < a,\ 0 < y < b)$. Найти:
    - спектр собственных значений энергии $E_{n_1 n_2}$ и собственные функции частицы $\Psi_{n_1 n_2}$;
    - вероятность ее нахождения в области $a/3 \leqslant x \leqslant 2a/3$, $b/3 \leqslant y \leqslant 2b/3$.
11. Решить уравнение Шредингера для частицы массы m, находящейся в трехмерном непроницаемом потенциальном ящике, ширина которого по оси x равна a, а по оси y равна b, по оси z равна c $(0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c)$. Найти спектр собственных значений энергии $E_{n_1 n_2 n_3}$ и собственные функции частицы $\Psi_{n_1 n_2 n_3}$.
12. Найти четные н нечетные энергетические уровни дискретного спектра частицы в симметричной потенциальной яме вида $U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$. Каково число состояний частицы в дискретном спектре в зависимости от глубины ямы? Каково условие появления новых состояний дискретного спектра при углублении ямы?
    - Найти энергетические уровни нижней части спектра в случае глубокой потенциальной ямы $U_0 \ggg \hbar^2/ma^2$ и определить смещение этих уровней по сравнению с энергетическими уровнями частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме.
    - Рассмотреть симметричную потенциальную яму малой глубины $U_0 \lll \hbar^2/ma^2$. Показать, что в такой яме имеется одни уровень дискретного спектра, и получить приближенные выражения для энергии и нормированной волновой функции этого состояния. Найти средние значения $\overline{U(x)}$ и $\overline{T}$.
13. Найти энергетические уровни дискретного спектра и нормированные волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальной яме $U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < 2a, \\ 0, & |x| > 2a \end{cases}$. Определить средние значения координаты и импульса, а также их флуктуации. Проверить соотношение неопределенностей для координаты и импульса в стационарных состояниях.
14. Найти уровни энергии н нормированные волновые функции состояний дискретного спектра частицы в поле $U(x) = -\alpha\delta(x), \alpha > 0$. Найти средние значения кинетической и потенциальной энергии в этих состояниях.
15. Найти энергетические уровни частицы в поле вида $U(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x), \alpha > 0, & |x| < a, \\ \infty, & |x| > a \end{cases}$. При выполнении условия $m\alpha a/\hbar^2 \ggg 1$ исследовать структуру уровней нижней части спектра. Показать, что энергетический спектр состоит из последовательности пар близко расположенных уровней, и найти расстояние между этими близко расположенными уровнями.

Каков спектр сильно возбужденных состояний частицы? Какова картина энергетических уровней при $\alpha < 0$?

16. Для частицы в поле вида $U(x) = \begin{cases} -\alpha\delta(x-a), & x > 0, \\ \infty, & x < 0, \end{cases}$ найти зависимость числа состояний дискретного спектра от параметра $m\alpha a/\hbar^2$.

17. Частица массой m_0 находится в потенциальной яме $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \leqslant a, \\ U_0, & x > a. \end{cases}$ Получить уравнение, определяющее спектр собственных значений энергии частицы для $E < U_0$. Обосновать дискретность энергетического спектра для $E \geqslant \dfrac{\pi^2\hbar^2}{8m_0 a^2}$. Используя результаты задачи, найти:

   - значение величины a^2U_0, при котором появляется n-й дискретный уровень;
   - число уровней в яме, у которой $a^2U_0 = \dfrac{110\hbar^2}{m_0}$;
   - значение a^2U_0, при котором энергия единственного уровня равна $U_0/2$, какова при этом вероятность нахождения частицы вне ямы?

18. Частица массой m_0 находится в потенциальной яме $U(x) = \begin{cases} U_0, & x < 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \leqslant a, \\ U_0, & x > a. \end{cases}$ Получить уравнение, определяющее спектр собственных значений энергии частицы. Для $E < U_0$ обосновать дискретность энергетического спектра. Используя результаты задачи, найти:

   - значение a^2U_0, при котором энергия основного состояния равна $3U_0/4$;
   - значение величины a^2U_0, при котором появляется 3-й дискретный уровень;
   - число энергетических уровней в яме, если $a^2U_0 = 125\hbar^2/m_0$;
   - найти приближенное аналитическое выражение энергии нижних уровней ($E \lll U_0$), если $a^2U_0 \ggg \hbar^2/m_0$.

19. Частица массы m движется в одномерной прямоугольной асимметричной потенциальной яме конечной глубины $U(x) = \begin{cases} V_1, & x < 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \leqslant a, \\ V_2, & x > a. \end{cases}$ Найти:

   - энергии стационарных состояний частицы.
   - При каком условии в яме не будет связанных состояний?
   - Каково максимальное число уровней при заданных V_1, V_2 и a?
   - Рассмотреть предельные случаи $V_1 \to \infty$ и $V_1 = V_2$.

20. Частица массы m падает вниз с ускорением g на абсолютно упругую горизонтальную поверхность. Найти энергии стационарных состояний.

21. Показать, что среднее значение силы, действующей на частицу в стационарном состоянии дискретного спектра, равно нулю.

22. Частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме. Вычислить среднюю силу, с которой частица действует на каждую из стенок ямы в стационарных состояниях. Сравнить с результатом классической механики.

8 Потенциальные барьеры

1. Определить коэффициент отражения частицы от прямоугольной потенциальной ступеньки $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & x \geqslant 0, \end{cases}$ в зависимости от энергии частицы E.

2. Электрон обладает энергией E=10 эВ. Определить, во сколько раз изменится его скорость v и длина волны де Бройля λ при прохождении через потенциальный барьер высотой U=6 эВ бесконечной ширины.
3. Протон с энергией E=1 МэВ изменил при прохождении бесконечно широкого потенциального барьера ($U \lll E$) длину волны де Бройля λ на 1%. Определить высоту потенциального барьера U.
4. На пути электрона с длиной волны де Бройля λ_1=0,1 нм находится бесконечно широкий потенциальный барьер высотой U=120 эВ. Определить длину волны де Бройля λ_2 после прохождения барьера.
5. Электрон с энергией E=100 эВ падает на бесконечно широкий потенциальный барьер высотой U=64 эВ. Определить вероятность того, что электрон отразится от барьера.
6. Электрон с энергией E=25 эВ, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути потенциальный барьер высотой U=9 эВ бесконечной ширины. Определить коэффициент преломления n волн де Бройля на границе раздела.
7. Определить коэффициент преломления n волн де Бройля для протона, движущегося в отрицательном направлении оси x, на границе бесконечно широкого потенциального барьера высотой U=9 эВ. Кинетическая энергия протона равна 16 эВ.
8. Вывести формулу, связывающую коэффициент преломления n волн де Бройля на границе низкого бесконечно широкого потенциального барьера и коэффициент отражения R от него.
9. Вывести формулу, связывающую коэффициент прохождения D частиц через низкий, бесконечно широкий потенциальный барьер и коэффициент преломления n волн де Бройля.
10. Коэффициент отражения R протона от низкого потенциального барьера бесконечной ширины равен $2{,}5{\cdot}10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота барьера и от энергии E падающих электронов.
11. При каком отношении высоты U низкого потенциального барьера бесконечной ширины и энергии e электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения $R = 0.5$?
12. Вычислить коэффициент прохождения электронов с энергией E=100 эВ через потенциальный барьер высотой U=99,75 эВ бесконечной ширины.
13. Электрон движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути высокий потенциальный барьер бесконечной ширины. Найти эффективную глубину проникновения электрона за барьер, если $U - E$=1 эВ.
14. Частица массой m_0 имеющая энергию $E > 0$, движется слева направо в потенциальном поле вида $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > a, \\ -U_0, & 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$ Найти коэффициент прохождения D и отражения R. Используя полученные результаты, определить:

    - энергию E, при которой частица будет беспрепятственно проходить через яму; установить для этого случая связь между шириной ямы a и длиной волны де Бройля λ, внутри ямы.
    - при заданных значениях E и U_0 ширину ямы a, при которой коэффициент отражения R максимален.

15. Частицы массы m каждая рассеиваются на прямоугольных симметричных потенциальных барьерах:

    - $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > a, \\ U_0, & 0 \leqslant x \leqslant a; \end{cases}$
    - $U(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, x > a, \\ U_0, & -a \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$

Определить коэффициенты отражения и прохождения частицы как функции энергии E. Исследовать следующие частные предельные случаи:

- $E \to \infty$ (фактически $E \ggg U_0$));
- случай барьера малой прозрачности $\dfrac{(U_0 - E)ma^2}{2\hbar^2} \ggg 1$;
- $E \to 0$ (фактически $E \lll \dfrac{ma^2 U_0^2}{\hbar^2}$, $E \lll U_0$);
- $\dfrac{ma^2 U_0}{\hbar^2} \lll 1$ и $\dfrac{ma^2 E}{\hbar^2} \lll 1$;
- $E \approx U_0$.

16. Ширина d прямоугольного потенциального барьера равна 0,2 нм, разность энергий $U - E$=0,5 эВ. Во сколько раз изменится вероятность прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в 10 раз?
17. Электрон с энергией E=9 эВ движется в положительном направлении оси x. При какой ширине d потенциального барьера коэффициент прохождения D=0,1, если высота барьера U=10 эВ.
18. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $\triangle\varphi$=15 кВ. Во сколько раз отличается коэффициент прохождения D_e для электрона и D_p для протона, если высота барьера U=20 кэВ, а ширина d=0,1 пм?
19. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной d=0,5 нм. Высота U барьера больше энергии E электрона на 1%. Вычислить коэффициент прохождения D, если энергия электрона 100 эВ.
20. Частицы массы m каждая рассеиваются на δ–образных потенциальных барьерах:

    - $U(x) = \alpha\delta(x), \alpha > 0$,
    - $U(x) = \alpha\delta(x - a), \alpha > 0$.

    Найти коэффициенты отражения и прохождения как функции энергии частиц.
21. Частицы массы m каждая рассеиваются на системе из двух одинаковых δ–образных потенциальных барьеров $U(x) = \Omega\left(\delta(x) + \delta(x - a)\right)$. При каких значениях энергии частиц данная система будет прозрачной для них?
22. Вычислить коэффициент прохождения барьера $U(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, x > a, \\ \dfrac{U_0}{a}x + U_0, & -a \leqslant x \leqslant 0, \\ -\dfrac{U_0}{a}x + U_0, & 0 \leqslant x \leqslant a \end{cases}$ для частицы массой m_0 при энергии $E < U_0$.
23. Для частицы массой m_0 и энергией $E < U_0$ найти коэффициент прохождения барьера, заданного потенциальной кривой $U(x) = U_0\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$.

10 Гармонический осциллятор

1. Вычислить коммутатор $[\hat{H}, (\hat{a^+})^n]$, где $\hat{H}$, $\hat{a^+}$ — гамильтониан и оператор рождения кванта энергии ГО.

2. Вычислить коммутатор $[\hat{H}, (\hat{a}^-)^n]$, где $\hat{H}$, $\hat{a^-}$ — гамильтониан и оператор уничтожения кванта энергии ГО.

3. Показать, что гамильтониан ГО может быть представлен в виде $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a^+} + \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Вычислить среднюю потенциальную и среднюю кинетическую энергии ГО.

5. Проверить соотношение неопределенностей для координаты и импульса в случае с одномерным линейным гармоническим осциллятором.

6. Исходя из соотношения неопределенностей, определить энергию основного состояния ГО.

7. Найти волновую функцию основного состояния ГО $\left(E_0 = \dfrac{\hbar\omega}{2}\right)$.

8. Исходя из того, что $\Psi_0(x) = \left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} exp\left(-\dfrac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$, найти волновую функцию первого возбужденного состояния ГО.

9. Линейный одномерный гармонический осциллятор приведен в основное состояние. Найти вероятность его обнаружения в классически доступной области.

10. Найдите энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний частицы в поле $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0. \end{cases}$

11. Волновая функция осциллятора в момент $t = 0$ имеет вид $\Phi(x, 0) = \dfrac{\Phi_0(x) + 2i\Phi_1(x)}{\sqrt{5}}$, где $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$ — нормированные волновые функции стационарных состояний осциллятора. Убедитесь, что $\Phi(x, 0)$ нормирована на единицу. Найдите $\Phi(x, t > 0)$. Вычислите среднюю энергию осциллятора. Найдите вероятности $\omega(E_0)$, $\omega(E_1)$ того, что осциллятор имеет энергию E_0, E_1. Каково среднее значение координаты осциллятора $\bar{x}(t)$?

12. Найдите $|\Phi(x, t > 0)|^2$, если волновая функция гармонического осциллятора в момент $t = 0$ имеет вид $\Phi(x, 0) = exp\left(-\dfrac{m\omega(x - x_0)^2}{2\hbar}\right)$.

13. Масса осциллятора m, частота ω, заряд e. На осциллятор действует постоянное однородное электрическое поле напряженности ε, направленное вдоль оси Ox. Найти энергии стационарных состояний и соответствующие им волновые функции.

14. Проквантовать движение ГО исходя из правила Бора–Зоммерфельда.

15. Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы массой m, движущейся в плоскости xy в поле $U(x, y) = \dfrac{1}{2}m(\omega_X^2 x^2 + \omega_Y^2 y^2)$ в случае, когда отношение ω_X/ω_Y не является рациональным числом. Рассмотреть отдельно случай когда ω_X/ω_Y — рациональное число, в частности случай кругового осциллятора: $\omega_X = \omega_Y = \omega$.

16. Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы массой m, движущейся в плоскости xy в поле $U(x, y) = \dfrac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$, $|\alpha| < m\omega^2$.

17. Две частицы массами m_1 и m_2, способные совершать одномерное движение, соединены пружиной жесткости κ. Найти энергии стационарных состояний такой системы и соответствующие им волновые функции.